BA003 - Matematika 3
GA05 - Matematika III

CVIČENÍ 1

Opakování kvadriky. Opakování ntegrály. Zakreslování grafů množin.

cvičení ZS 2020/2021

Lenka Rýparová

Brno

Kanonické tvary kvadrik v E_3

NEROTAČNÍ KVADRIKY

Kvadratckými plochami, neboli kvadrikami, nazýváme plochy druhého stupně, tj. plochy, jejichž rovnice v pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{0; x, y, z\}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + ezy + fxz + gx + hy + iz + j = 0,$$

kde koeficienty $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ jsou reálná čísla a všechna nejsou současně rovna 0.
Je-li osa kvadriky (v případě osové kvadriky) nebo povrchové přímky kvadriky (v případě válcové plochy) rovnoběžná s některou ze souřadnicových os, potom se výše zmiňovaná rovnice zjednodušší na

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz + j = 0,$$

Postup při vyšetřování rovnic (analogický postup lze aplikovat i po úpravě rovnice na čtverec):

1. Rovnice *obsahuje* všechny proměnné

   a) Všechny proměnné *jsou* na druhou:

   Elipsoid: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

   Jednodílný hyperboloid: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

   Dvoudílný hyperboloid: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

   Eliptická kuželová plocha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

   b) Všechny proměnné *nejsou* na druhou:

   Eliptický paraboloid: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$

   Hyperbolický paraboloid: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$

2. Rovnice *neobsahuje* všechny proměnné

   Jde o válcovou plochu nebo její speciální případ.

   Eliptická plocha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

   Hyperbolická plocha: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

   Parabolická plocha: $x^2 = a^2 \cdot y$

   Dvojice různoběžných rovin plocha: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$

   Dvojice rovnoběžných rovin plocha: $x^2 - a^2 = 0$

   Jedna rovina: $x^2 = 0$

ROTAČNÍ KVADRIKY

Kanonické rovnice se pouze změní v tom smyslu, že některé poloosy si budou rovny.

1. Rovnice *obsahuje* všechny proměnné

   a) Všechny proměnné *jsou* na druhou:

   Rotační kuželová plocha: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

   Rotační elipsoid: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

   Kulová plocha: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

   Jednodílný rotační hyperboloid: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

   Dvoudílný rotační hyperboloid: $-\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

   b) Všechny proměnné *nejsou* na druhou:

   Rotační paraboloid: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

2. Rovnice *neobsahuje* všechny proměnné

   Rotační válcová plocha: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Příklad 1. Určete typ kvadriky: $-4x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 18y - 90z + 270 = 0$.
Řešení: Nejprve přeuspořádáme sčítance podle proměnných a takto upravenou rovnici doplníme (v proměnné y a z) na čtverec.

$$\begin{aligned}
-4x^2 + 9y^2 + 18y + 9z^2 - 90z + 270 &= 0 \\
-4x^2 + 9(y^2 + 2y) + 9(z^2 - 10z) + 270 &= 0 \\
-4x^2 + 9(y^2 + 2y + 1) - 9 + 9(z^2 - 10z + 25) - 225 + 270 &= 0 \\
-4x^2 + 9(y + 1)^2 + 9(z - 5)^2 &= -36 \qquad / : (-36) \\
\frac{x^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(z-5)^2}{4} &= 1 \\
\frac{x^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} - \frac{(z-5)^2}{2^2} &= 1
\end{aligned}$$

Střed kvadriky je $S = [0, -1, 5]$ a poloosy jsou $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$.
Jak oznáme o jakou kvadriku jde?

1. Rovnice obsahuje všechny proměnné.
2. Všechny proměnné jsou na druhou.
3. Všechny proměnné mají kladné znaménko? Nemají!
4. Osa rotace je rovnoběžná s osou x (protože $b = c$). Jde tedy o rotační plochu.
5. V tomto případě jde o **dvoudílný rotační hyperboloid**, který vznikne rotací hyperboly kolem osy rovnoběžné s osou x.

Příklady k samostatnému řešení:

1. Určete typ kvadriky: $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 8y - 4z + 36 = 0$.

   [*kulová plocha*, $S = [-5, 4, 2]$, $r = 3$]

Integrování - opakování

Příklad 2. Zintegrujte pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \left| \begin{array}{rcl} ax+b & = & t \\ a\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\ln|t| = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. $$\int x\sin x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rclrcl} u & = & x & v' & = & \sin x \\ u' & = & 1 & v & = & -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. $$\int \ln x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rclrcl} u & = & \ln x & v' & = & 1 \\ u' & = & \frac{1}{x} & v & = & x \end{array} \right| = x\ln x - \int\ \mathrm{d}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. $$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ e^{-\operatorname{arctg} x}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{arctg} x & = & t \\ \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int te^{-t}\ \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{rclrcl} u & = & t & v' & = & e^{-t} \\ u' & = & 1 & v & = & -e^{-t} \end{array} \right| =$$
$$= -te^{-t} + \int e^{-t}\ \mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\operatorname{arctg} x e^{-\operatorname{arctg} x} - e^{-\operatorname{arctg} x} = -e^{-\operatorname{arctg} x}(1 + \operatorname{arctg} x) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

5. $$\int \frac{\sin 2x}{\sin x\cos^3 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos^3 x}\ \mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = 2\operatorname{tg} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

6. $$\int \frac{x+1}{x^3-x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{x^2(x+1)}\ \mathrm{d}x = \star$$

   Rozložíme zlomek na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \qquad\qquad / \cdot x^2(x-1) \\ x+1 &= Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 0 = A \qquad + C \\ x^1: & 1 = -A + B \\ x^0: & 1 = \qquad - B \end{array}\right\} \begin{array}{l} B = -1 \\ A = -2 \\ C = \ \ 2 \end{array}$$

$$\star = -2\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

7. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}} = \left| \begin{array}{rcl} 2-5x & = & u \\ -5\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}u \end{array} \right| = -\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u = -\frac{2}{5}\sqrt{u} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

8. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2} = \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{\frac{3}{2}}\,x & = & t \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\ x\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

9. $$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x - \sin 5\alpha \cdot x + c, \quad \alpha, c \in \mathbb{R}$$

10. $$\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int (-\sin x)(\cos^2 x - 1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \cos x & = & t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int (t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int (t^4 - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} = \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Příklady k samostatnému řešení:
Vypočtěte

1. $\displaystyle\int xe^{\alpha x}\mathrm{d}x$ $\qquad [\frac{x}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}+c,\ c\in\mathbb{R}\ ]$

2. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\ \ln|\sin x|+c,\ c\in\mathbb{R}\ ]$

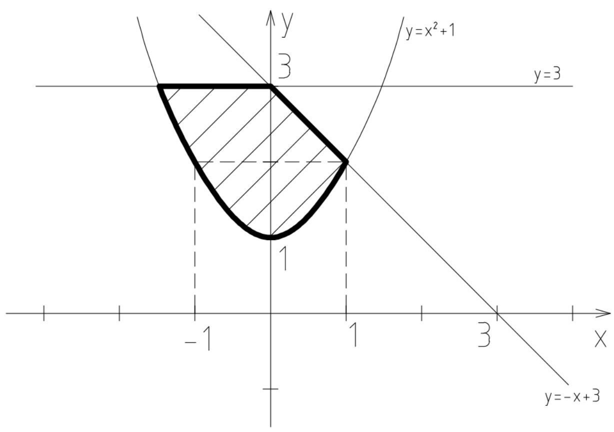
3. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\ -\operatorname{cotg} x-\operatorname{tg} x+c,\ c\in\mathbb{R}\ ]$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\ -\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|+c,\ c\in\mathbb{R}\ ]$

5. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\ -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x}+c,\ c\in\mathbb{R}\ ]$

Zakreslování množin

Příklad 3. Najděte a načrtněte množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice $x, y \in \mathbb{R}$ platí: $x^2 - y + 1 \leq 0$, $x + y - 3 \leq 0$ a $y \leq 3$.
Řešení: Nejdříve zjistíme, jak vypadá hranice této množiny, tedy jaké křivky popisují *rovnice* ze zadání $x^2 - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ a $y = 3$.
První rovnice je rovnice paraboly ($y - 1 = x^2$) o vrcholu $V = [0, 1]$. K ní příslušná nerovnice pak popisuje část roviny ohraničenou právě touto parabolou (tj. buď její vnitřek, nebo vnějšek). To, zda nerovnice popisuje vnitřek, nebo vnějšek paraboly zjistíme tak, že dosadíme souřadnice libovolného bodu (který na parabole neleží), např. $[0, 0]$, a zjistíme, zda tento bod splňuje danou nerovnost. Po dosazení dostáváme $1 \leq 0$, což je nepravda, a tedy bod $[0, 0]$ nebude ležet v hledané množine - proto vyšrafujeme vnitřek paraboly.
Druhá rovnice je rovnice přímky, kterou zakreslíme např. pomocí dvou bodů ($[0, 3]$ a $[3, 0]$). Příslušná nerovnice pak popisuje jednu z polorovin určenou touto přímkou. Po dosazení bodu $[0, 0]$ do nerovnice dostáváme $-3 \leq 0$, což je pravda, a tedy bod $[0, 0]$ musí ležet v hledané polorovině - proto vyšrafujeme polorovinu „pod" touto přímkou.
Třetí a poslední rovnice popisuje přímku, která je rovnoběžná s osou x a prochází bodem 3 na ose y. Příslušná nerovnice pak opět popisuje jednu z polorovin určenou touto přímkou. Opět dosadíme do nerovnice souřadnice bodu $[0, 0]$, dostáváme $0 \leq 3$, což je pravda, a tedy bod $[0, 0]$ v námi hledané polorovině leží - vyšrafujeme proto polorovinu „pod" touto přímkou.
Řešení celého příkladu je pak ta část roviny, ve které se všechny šrafy protínají, viz obrázek.



Příklady k samostatnému řešení:
Zakreslete graf množiny M:

1. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; x \leq y, \; y \leq 1, \; x \geq 0\}$
2. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; x + y^2 - 2y + 1 \geq 0, \; x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$
3. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 \geq x, \; y \leq -x^2, \; y \geq -x - 1\}$