

## BAA009 - Matematika 2 (G)

DOMÁCÍ ÚKOLY  
cvičení LS 2020/2021

Lenka Rýparová

1. Integrace užitím základních vzorců

- a)  $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \, dx$   $\left[\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + c\right]$
- b)  $\int \frac{2\sin^2 x - 3\cos^2 x}{5\cos^2 x} \, dx$   $\left[\frac{2}{5}\operatorname{tg} x - x + c\right]$
- c)  $\int \frac{3 + e^{-x} \sin x}{e^{-x}} \, dx$   $[3e^x - \cos x + c]$
- d)  $\int (1 + \cot^2 x) \, dx$   $[-\operatorname{cotg} x + c]$
- e)  $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) \, dx$   $\left[e^x + \frac{1}{x} + c\right]$
- f)  $\int \frac{2\operatorname{tg}^2 x + 5}{3\sin^2 x} \, dx$   $\left[\frac{1}{3}(2\operatorname{tg} x - 5\operatorname{cotg} x) + c\right]$
- g)  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \, dx$   $[x - 2\arctg x + c]$
- h)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$   $\left[\frac{1}{2}(x + \sin x) + c\right]$
- i)  $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} \, dx$   $\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctg x + c\right]$

(NP) Integrace užitím základních vzorců

- a)  $\int \frac{8 - \sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$   $[7\operatorname{tg} x + x + c]$
- b)  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} - 1) \, dx$   $\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + c\right]$
- c)  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$   $[\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + c]$
- d)  $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$   $[\operatorname{tg} x - x + c]$
- e)  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} \, dx$   $\left[-2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c\right]$

2. Integrace substituční metodou

- a)  $\int \frac{x^3 + 3}{x^2 + 1} \, dx$   $\left[\frac{1}{2}(x^2 + 1 - \ln|x^2 + 1|) + 3\arctg x + c\right]$
- b)  $\int (4x - 3)^4 \, dx$   $\left[\frac{1}{20}(4x - 3)^5 + c\right]$
- c)  $\int \frac{x}{x+4} \, dx$   $[x - 4\ln|x+4| + c]$
- d)  $\int \frac{x^3}{x+2} \, dx$   $\left[\frac{1}{3}(x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 12(x+2) - 8\ln|x+2| + c\right]$

- e)  $\int 10^{3x+5} dx$   $\left[ \frac{10^{3x+5}}{3 \ln 10} + c \right]$
- f)  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$   $[e^x + e^{-x} + c]$
- g)  $\int \frac{1}{1 + 4x^2} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \arctg 2x + c \right]$
- h)  $\int \frac{1}{(x-1)^2 + 4} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + c \right]$
- i)  $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$   $\left[ \arcsin \frac{x}{2} + c \right]$
- j)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$   $[\ln |\ln x| + c]$
- k)  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$   $\left[ -\frac{1}{2(1+x^2)} + c \right]$

(NP) Integrace substituční metodou

- a)  $\int \frac{1}{7x-9} dx$   $\left[ \frac{1}{7} \ln |7x-9| + c \right]$
- b)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} dx$   $\left[ \frac{1}{5} \arcsin 5x + c \right]$
- c)  $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx$   $\left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{3}{2}} x \right) + c \right]$
- d)  $\int \frac{1}{x^2+3x+3} dx$   $\left[ \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + c \right]$
- e)  $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$   $\left[ \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c \right]$
- f)  $\int \sin(2x-3) dx$   $\left[ -\frac{1}{2} \cos(2x-3) + c \right]$
- g)  $\int \frac{1}{\sqrt{6x+9}} dx$   $\left[ \frac{1}{3} (6x+9)^{\frac{1}{2}} + c \right]$
- h)  $\int \frac{1}{7x-9} dx$   $\left[ \frac{1}{7} \ln |7x-9| + c \right]$
- i)  $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$   $[\ln |e^x+1| + c]$
- j)  $\int \cotg x dx$   $[\ln |\sin x| + c]$

3. Integrace metodou per partes

- a)  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$   $[-x \cotg x + \ln |\sin x| + c]$

- b)  $\int x \sin^2 x \, dx$   $\left[ \frac{1}{4} \left( x^2 - x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \right]$
- c)  $\int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$   $\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - x + \operatorname{arctg} x \right) + c \right]$
- d)  $\int \arcsin x \, dx$   $\left[ x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \right]$
- e)  $\int (x^2 - 3x + 2)e^x \, dx$   $\left[ (x^2 - 5x + 7)e^x + c \right]$
- f)  $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$   $\left[ \ln(\ln x) \cdot \ln x - \ln x + c \right]$
- g)  $\int e^x \sin x \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c \right]$
- h)  $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$   $\left[ -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \right]$
- i)  $\int x^3 e^{x^2} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + c \right]$
- j)  $\int x \ln^3 x \, dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} \left( \ln^3 x - \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x - \frac{3}{4} \right) + c \right]$

(NP) Integrace metodou per partes

- a)  $\int x e^x \, dx$   $[e^x(x + 1) + c]$
- b)  $\int x \arcsin x \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} + c \right]$
- c)  $\int x \ln x \, dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \right]$
- d)  $\int \ln x \, dx$   $[x \ln x - x + c]$
- e)  $\int x \sinh x \, dx$   $[x \cosh x - \sinh x + c]$
- f)  $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arctg} x \right) + c \right]$

4. Integrace racionální lomené funkce

- a)  $\int \frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 - 4)} \, dx$   $\left[ \frac{2}{3} \ln|x + 1| + \frac{1}{12} \ln|x - 2| - \frac{3}{4} \ln|x + 2| + c \right]$
- b)  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$   $\left[ x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x - 2| + \frac{28}{3} \ln|x - 3| + c \right]$
- c)  $\int \frac{3x^2 + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{2}{9} \ln|x - 1| - \frac{13}{18} \ln|x + 2| - \frac{4}{3(x - 1)} + c \right]$
- d)  $\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5} \, dx$   $\left[ \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| - \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + c \right]$

e)  $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 3} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln |x^2 - 3x + 3| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{3}} + c \right]$

f)  $\int \frac{x^2}{1 - x^4} dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \ln |1 - x| + \frac{1}{4} \ln |1 + x| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c \right]$

(NP) Integrace racionální lomené funkce

a)  $\int \frac{x^3 + x}{(x^2 - 1)(x^2 - 2)} dx$   $\left[ -\ln|x - 1| - \ln|x + 1| + \frac{3}{2} \ln|x - \sqrt{2}| + \frac{3}{2} \ln|x + \sqrt{2}| + c \right]$

b)  $\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx$   $\left[ -\ln|x| + 2 \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + c \right]$

c)  $\int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$   $\left[ \ln|x + 1| + \frac{4}{x + 2} + c \right]$

d)  $\int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} dx$   $\left[ \frac{2}{5} \ln|x - 2| + \frac{1}{10} \ln|2x + 1| + c \right]$

5. Integrace goniometrických funkcí

a)  $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln|\cos x + 2| + c \right]$

b)  $\int \cos^5 x dx$   $\left[ \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c \right]$

c)  $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \cos x + \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x + c \right]$

d)  $\int \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx$   $\left[ \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + c \right]$

e)  $\int \cos 2x \sin 4x dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + c \right]$

f)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + c \right]$

(NP) Integrace goniometrických funkcí

a)  $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$   $\left[ \ln|1 + \sin^2 x| + c \right]$

b)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$   $\left[ -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c \right]$

c)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$   $\left[ \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + c \right]$

d)  $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$   $\left[ \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + c \right]$

e)  $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$   $\left[ \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{1}{28} \sin 7x + \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{36} \sin 9x + c \right]$

## 6. Integrace iracionálních funkcí

- a)  $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$   $\left[ \frac{1}{15}(3x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + c \right]$
- b)  $\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$   $\left[ \ln|x| - 3 \ln|1+\sqrt[3]{x}| + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + c \right]$
- c)  $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$   $[2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x} + c]$
- d)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$   $\left[ \ln|x| - 6 \ln|x^{\frac{1}{6}}+1| + c \right]$

## (NP) Integrace iracionálních funkcí

- a)  $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} dx$   $\left[ -\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} + c \right]$
- b)  $\int \frac{x+1}{\sqrt[4]{x-2}} dx$   $\left[ \frac{4}{7}(x-2)^{\frac{7}{4}} + 4(x-2)^{\frac{3}{4}} + c \right]$
- c)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$   $\left[ -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{1-x^2} + c \right]$
- d)  $\int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} dx$ ;  $\left[ 12 \left( \frac{1}{5}x^{\frac{5}{12}} - \frac{7}{4}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}} + \frac{5}{2}x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{12}} + \ln|(x^{\frac{1}{12}}-1)^3(x^{\frac{1}{12}}+1)^2| \right) + c \right]$

## 7. Výpočet určitého integrálu – úpravou

- a)  $\int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$  [2]
- b)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{2}{3}\sqrt{3} \right]$
- c)  $\int_0^{2\pi} (2 + \cos x) dx$  [4π]
- d)  $\int_2^4 |x^2 - 4x + 3| dx$  [2]

## (NP) Výpočet určitého integrálu – úpravou

- a)  $\int_1^8 \frac{2-x}{\sqrt[3]{x^5}} dx$   $\left[ -\frac{3}{4} \right]$
- b)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$   $\left[ -\frac{4}{3}\sqrt{3} + 2 \right]$
- c)  $\int_{-1}^2 (|x| - 3|x-1|) dx$  [-5]
- d)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$  [2]

8. Výpočet určitého integrálu – metoda per partes

- a)  $\int_1^2 x \ln(x^2 + 1) dx$   $\left[ -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \ln 5 - \ln 2 \right]$
- b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$   $\left[ \frac{\pi}{4} \right]$
- c)  $\int_1^e x^3 \ln x dx$   $\left[ \frac{1}{16}(3e^4 + 1) \right]$
- d)  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x dx$   $\left[ \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2} \right]$
- e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx$   $\left[ \frac{1}{5}(2e^\pi + 1) \right]$

(NP) Výpočet určitého integrálu – metoda per partes

- a)  $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$   $\left[ -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} \right]$
- b)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} x dx$   $\left[ \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4} \right]$
- c)  $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$   $\left[ \frac{4}{9}(2e^3 + 1) \right]$
- d)  $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$   $[-2\pi]$
- e)  $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$   $\left[ \frac{e}{2} - 1 \right]$

9. Výpočet určitého integrálu – substituční metoda

- a)  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx$   $\left[ \frac{\pi}{18} \right]$
- b)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^3 x dx$   $\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right]$
- c)  $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+1} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \ln 3 \right]$
- d)  $\int_{e^{-\pi}}^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$   $\left[ \frac{1}{2} (e^\pi - e^{-\pi}) \right]$
- e)  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{3+e^x} dx$   $[4-\pi]$

(NP) Výpočet určitého integrálu – substituční metoda

- a)  $\int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx$   $\left[ e - \frac{1}{e} \right]$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \right]$

c)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$  [1]

d)  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \right]$

e)  $\int_0^1 \frac{x^9}{(1+x^5)^3} dx$   $\left[ \frac{1}{40} \right]$

10. Vypočtěte obsah křivočarého lichoběžníka, který je ohraničen křivkami:

$$y = x^2 - x - 6 \text{ a } y = -x^2 + 5x + 14. \quad \left[ \frac{343}{3} \right]$$

(NP) Vypočtěte obsah křivočarého lichoběžníka, který je ohraničen křivkami:

$$y = x^3 \text{ a } y = 4x. \quad [8]$$

11. Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ , kde  $1 \leq x \leq e.$   $\left[ \frac{1}{4} (e^2 + 1) \right]$

(NP) Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ , kde  $1 \leq x \leq 3.$   $\left[ 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \right]$

12. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadánymi křivkami kolem osy  $x.$  Křivky jsou dány rovnicemi  $y = x^2$ ,  $y = 1 - x^2.$   $\left[ \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi \right]$

(NP) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadánymi křivkami kolem osy  $x.$  Křivky jsou dány rovnicemi  $xy = 4$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  a  $y = 0.$  [12π]

(NP) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadánymi křivkami kolem osy  $y.$  Křivky jsou dány rovnicemi  $y = e^{-x}$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  a  $y = 0.$   $\left[ 2\pi \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right]$

13. Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadánymi křivkami kolem osy  $x.$  Křivky jsou dány rovnicemi  $y^2 = 4x$ ,  $0 \leq x \leq 3.$   $\left[ \frac{56}{3}\pi \right]$

14. Stanovte definiční obor funkce  $f$  a zakreslete jej.

a)  $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$  (NP)  $f(x, y) = 2\sqrt{y - x^2} + 5\sqrt{x - y^2}$

b)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$  (NP)  $f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin(2xy)$

[a]  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\};$  b)  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: y \geq x^2 \wedge x \geq y^2\};$

(NP)  $D(f) = \mathbb{E}_2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: y = x \wedge y = -x\};$  (NP)  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \left( \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: y \geq -\frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: y \leq -\frac{1}{2x} \wedge x < 0\} \right) \cup \left( \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: y \leq \frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{E}_2: y \geq \frac{1}{2x} \wedge x < 0\} \right)$

15. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a)  $z = \frac{3xy}{x-y}$

b)  $z = (\sin x)^{\cos y}$

c)  $z = xye^{\sin \pi xy}$

d)  $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{a)} z'_x = -\frac{3y^2}{(x-y)^2}, z'_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2}; \text{ b)} z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y-1}, z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y}; \\ \text{c)} z'_x = e^{\sin \pi xy} y (1 + \pi xy \cos \pi xy), z'_y = e^{\sin \pi xy} x (1 + \pi xy \cos \pi xy); \\ \text{d)} z'_x = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{2x}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right]$$

16. Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a)  $z = \frac{\cos x^2}{y}$

b)  $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$

a)  $z''_{xx} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}, z''_{yy} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}, z''_{xy} = \frac{2x \sin x^2}{y^2};$

b)  $z''_{xx} = \frac{4y}{9x^{\frac{7}{3}}}, z''_{yy} = \frac{-x}{4\sqrt[4]{y^3}}, z''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$

17. Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí.

a)  $z = e^x \ln y + \sin y \ln x, z'''_{xyy} = ?, z'''_{yyy} = ?$

b)  $z = x^2y + e^{xy^2}, z'''_{xxy} = ?$

a)  $z'''_{xyy} = -\frac{e^x}{y^2} - \frac{\sin y}{x}, z'''_{yyy} = \frac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x; \text{ b) } z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2} y^3 (4 + 2xy^2)$

18. Napište Taylorův polynom stupně  $n$  pro funkci  $f(x, y)$  v bodě  $A$ .

a)  $z = e^x \sin y, A = [0, 0], n = 3$

b)  $z = \sin(xy), A = [0, \frac{\pi}{2}], n = 2$

a)  $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3; \text{ b) } \frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})$

19. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a)  $z = u + v^2, u = x^2 + \sin y, v = \ln(x + y)$

b)  $z = u^2v - v^2u, u = x \cos y, v = x \sin y$

a)  $z'_x = 2x + \frac{2}{x+y} \ln(x+y), z'_y = \cos y + \frac{2}{x+y} \ln(x+y);$

b)  $z'_x = 3x^2 \sin y \cos y (\cos y - \sin y), z'_y = x^3 (\sin y + \cos y)(1 - 3 \sin y \cos y)$

20. Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$  zadané implicitně.

a)  $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$

b)  $x + y + z = e^z$

a)  $z'_x = \frac{a}{c}, z'_y = \frac{b}{c}; \text{ b) } z'_x = z'_y = \frac{1}{x+y+z-1}$

21. Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě  $A$  plochy  $z = f(x, y)$  zadané implicitně danou rovnicí.

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, ?]$

b)  $(z^2 - x^2)xzy - y^5 = 5, A = [1, 1, 2]$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \tau_1: 2x - 6y + 3z - 49 = 0, \quad n_1: x = 2 + 4t, \quad y = -6 - 12t, \quad z = 3 + 6t, \\ & \tau_2: 2x - 6y - 3z - 49 = 0, \quad n_2: x = 2 + 4t, \quad y = -6 - 12t, \quad z = -3 - 6t, \\ \text{b)} \quad & \tau: 2x + y + 11z - 25 = 0, \quad n: x = 1 + 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = 2 + 11t \end{aligned}$$

22. Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a)  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

b)  $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

c)  $z = \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & [4, 4] - \text{lok. max.}; \quad \text{b)} \quad [-1, 2] - \text{není}, \quad [0, 0] - \text{lok. min.}, \quad [-1, -2] \text{ a } [-\frac{5}{3}, 0] - \text{lok. max.}; \\ & \text{c)} \quad [3, 6] - \text{lok. max.} \end{aligned}$$

(NP) Nalezněte vázané extrémy dané funkce při dané podmínce.

a)  $z = x + 2y$ ; podm.  $x^2 + y^2 = 5$

b)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ; podm.  $x + y = 2$

$$[\text{a)} \quad [1, 2] - \text{lok. max.}, \quad [-1, -2] - \text{lok. min.}; \quad \text{b)} \quad [1, 1] - \text{lok. min.}]$$

(NP) Nalezněte absolutní (globální) extrémy daných funkcí.

a)  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ; na obdélníku  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

b)  $z = x^2 - xy + y^2$ ;  $M$  je určena nerovnicí  $|x| + |y| \leq 1$

c)  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ ; na oblasti dané nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq 25$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & [1, 2] - \text{abs. max.}, \quad [1, 0] - \text{abs. min.}; \quad \text{b)} \quad [0, 1], \quad [0, -1], \quad [1, 0], \quad [-1, 0] - \text{abs. max.}, \\ & [0, 0] - \text{abs. min.}; \quad \text{c)} \quad [3, -4] - \text{abs. min.}, \quad [-3, 4] - \text{abs. max.} \end{aligned}$$